

# LA CONSTRUCTION DU NOMBRE

## CYCLE 1

Les guides fondamentaux pour enseigner.

### Légende :

-  Repère de progression
-  Etat de la recherche
-  Idée importante

## Introduction

### Attendus de fin de cycle :

- décomposer et recomposer jusqu'à 10.
- connaître la comptine jusqu'à 30
- résoudre des problèmes et anticiper une position après déplacement
- donner le nombre d'objets après une augmentation, diminution, partage, etc.

## Développement cognitif et apprentissage premier de la numération

### Vers l'abstraction : progressivité des apprentissages numériques

#### Un sens précoce des quantités

 Les intuitions des quantités sont présentes chez tous les enfants depuis les premiers mois de vie.<sup>1</sup> Les bébés distinguent des collections de quatre parmi des collections de 12, ou des collections de 6 parmi des collections de 18, etc.

*Exemple : Léa a 30 billes, Hugo en a 28. On en donne 12 à Hugo. Qui en a le plus ?*

<sup>1</sup> En 2009, une équipe de chercheuses de l'université Paris-Descartes a pu mettre en évidence ces intuitions chez des nouveau-nés de quelques jours.

## Un sens précode calcul

Les nourrissons sont capables d'effectuer des opérations sur des collections d'objets.<sup>2</sup>

**Grands nombres** : dès que les enfants parviennent à associer nombres et quantités, ils sont capables de faire des calculs approximatifs avant de connaître les règles des opérations arithmétiques.

**Petits nombres** : principe de la “**subitisation**” (ne repose pas sur un traitement des collections mais sur un traitement en parallèle d'un nombre limité d'objets).

*Il se pourrait qu'apprendre à utiliser le pluriel et le singulier au niveau du langage aide les très jeunes enfants à créer des relations entre les représentations des petites et des grandes quantités.*

## L'apprentissage des mots-nombres.

Les enfants ne comprennent pas nécessairement la signification de leur premier comptage, même en pointant des objets. Ils récitent une comptine du type “am-stram-gram”.

Exemple de la tâche “Donne-moi N”. (fait avec des nombres que les enfants connaissent de la comptine)

Avant 30 mois	Entre 30 mois et 3 ans	3 ans à 3 ans et demi	3 ans et demi à 4 ans
Aucun nombre	UN	UN, DEUX.	1, 2 3 puis 4.

Si un enfant donne 5, il est capable de donner un nombre d'objets dans sa liste de comptage. Il utilise spontanément le comptage.

**Les apprentissages mathématiques ne dépendent pas de l'âge absolu mais de l'âge de l'entrée dans le comptage.** (exemple : seul les enfants entrés dans la numération s'appliquent à aligner des objets avec ceux d'une modèle dans le cas d'une correspondance terme à terme).

**IL N'Y A PAS DE MÉTHODE D'ENSEIGNEMENT RECONNUE EFFICACE PAR LA RECHERCHE,** mais l'environnement et la scolarisation précoce ont un effet déterminant sur l'entrée dans la numération.

## Le comptage sur les doigts

- Utilisation des doigts pour compter et calculer en maternelle
- Les doigts comme outil efficace pour la résolution d'opérations simples
- Les doigts comme première étape vers l'abstraction
- Représentation de quantités par différents moyens
- Transition entre la représentation analogique et symbolique des quantités
- Les doigts comme outil pour résoudre des opérations mentalement.
- Stade développemental initial où les enfants modélisent les quantités d'un problème sur leurs doigts avant de les additionner.

---

<sup>2</sup> Les résultats montrent que les nourrissons réagissent quand on leur présente des résultats erronés d'addition ou soustraction d'objets.

- Étape de transition où les enfants modélisent le premier terme de l'addition, puis poursuivent en comptant le deuxième terme sur leurs doigts : une stratégie de surcomptage, où un opérande est représenté mentalement, suivi de l'ajout du deuxième terme.
- La compréhension qu'un terme de l'addition peut être représenté mentalement conduit à la possibilité de représenter mentalement deux termes et de se détacher des supports externes pour effectuer des calculs.

## L'apprentissage des chiffres

- L'enfant doit passer de l'utilisation d'aides externes manipulables (doigts, objets) à l'utilisation de symboles.

 À cinq ans, les enfants sont capables de transcoder des quantités analogiques en mots-nombres et chiffres (et transcoder de l'un à l'autre)

 Pas de transcodage des mots-nombres en chiffres arabes, mais des points en symboles relativement aisément.

 *Les chercheurs suggèrent que les enfants devraient d'abord apprendre à associer des mots-nombres à des collections d'objets, puis associer des nombres écrits en chiffres à ces mêmes collections avant d'apprendre la correspondance entre mots-nombres et nombres écrits en chiffres.*

- Les activités impliquant les trois formats de représentation des nombres (verbal, visuel, analogique) sont utiles pour aider les enfants à faire ces associations. : les jeux de plateau et d'autres jeux qui combinent ces formats (oie, etc.).

### Repère de progressivité à l'âge :

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans	À partir de 5 ans
<b>Récitation de la comptine numérique</b>	Peut être connue entre 0 et 10	Peut être connue entre 15 et 30	Peut être connue entre 20 et 40
<b>Nombres écrits en chiffres</b>	La moitié des enfants en acquiert la lecture jusqu'à 5	La lecture est bien acquise jusqu'à 5 et environ la moitié des enfants lit les nombres jusqu'à 10	La lecture est aisée jusqu'à 10 et environ la moitié des enfants lit les nombres jusqu'à 30
<b>Déterminer et exprimer la cardinalité d'un ensemble</b>	Environ la moitié des enfants réussit jusqu'à 7-8	Les enfants y parviennent jusqu'à 7-8	Taux de réussite élevé
<b>"Donne-moi N"</b>	Les enfants y parviennent jusqu'à 3-4	La moitié des enfants y parvient jusqu'à 8-9	Presque tous les enfants y parviennent jusqu'à 10

<b>Calcul mental</b>		Les enfants commencent à pouvoir trouver un résultat avec de petits nombres et la formulation "et encore"	Plus de la moitié des enfants répond correctement avec la formulation "plus" et de petits nombres
----------------------	--	---	---

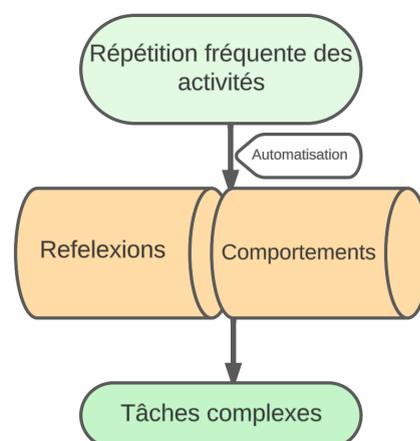
## Comment favoriser les apprentissages ?

### Greffer les symboles sur les intuitions de quantité

- Il est crucial de renforcer les intuitions sur les quantités pour établir des bases solides pour l'apprentissage mathématique.
- Renforcer ces intuitions ne suffit pas à garantir de meilleures performances en mathématiques.
- Des activités basées sur la manipulation de quantités ont un effet bénéfique sur la perception des quantités,
  - mais ces effets s'estompent rapidement
  - ne permettent pas forcément de meilleures performances en CP.
- Il est important de travailler le lien entre les quantités et les symboles numériques (mots-nombres, chiffres) dès le plus jeune âge.
- Les enfants qui comprennent bien les symboles numériques semblent développer une meilleure perception des quantités numériques et des intuitions sur les quantités.
- L'apprentissage de la manipulation des symboles numériques peut contribuer à affiner la perception des quantités et les intuitions mathématiques des enfants.

### Apprendre en s'exerçant pour développer des automatismes

- Les activités automatisées demandent peu d'efforts cognitifs.
- **L'automatisation** libère des ressources cognitives pour des activités plus avancées.
- La répétition de la comptine numérique en classe facilite la récupération automatique de l'information en mémoire.
- L'automatisation concerne également la maîtrise de procédures abstraites pouvant s'appliquer à différents contenus.
- La répétition d'activités ⇒ résolution plus rapide et efficace.
- L'entraînement régulier aide les élèves à reconnaître les problèmes pouvant être résolus à l'aide de procédures automatisées.



## Favoriser les apprentissages grâce aux jeux

Utilisation des jeux comme support.

Jeux symboliques = jeux naturels

Jeux faisant appel aux nombres = renforcer les capacités des élèves à passer d'un nombre à l'autre

*Ex : jeu de l'oie : (Siegler) efficace quand il offre une analogie avec l'ordre de la suite numérique. (large base multimodale pour une représentation linéaire). Travail cardinal (position des cases) et ordinal (constellation du dés = nb de case).*

*La ligne numérique mentale : représentation mentale = ligne de gauche à droite + compression des grand nombres).*

*Qualité de la représentation mentale de la ligne numérique = positionner 36 entre 0 et 100, sans graduation. On observe une représentation logarithmique. (la magnitude s'améliore avec l'âge).*

## Favoriser la réflexion

Les activités de dénombrement ne permettent pas toujours d'évaluer la compréhension (répétition par imitation sans comprendre).

**Amener les enfants à réfléchir = proposer des activités dans lesquelles il y a une prédiction (résolution empirique impossible) RESOLUTION DE PROBLEME.**

*Exemple : prédiction d'une transformation (ajout ou retrait)*

3-4 ans : même si erreur, transformation ordinale faite par les enfants, sans répéter une procédure apprise.

**L'enfant doit, au cours de son développement et de son cursus scolaire, apprendre à donner du sens au nombre. Il doit apprendre à considérer les symboles numériques comme porteurs de magnitudes et non comme une simple suite ordonnée de symboles. À cette fin, la mobilisation régulière des quatre modalités d'apprentissage à la maternelle (le jeu, la réflexion, l'exercice et la mémorisation), de façon complémentaire, concomitante ou alternée, répond à ces objectifs.**

# Apports de la recherche en didactiques sur l'apprentissage numérique

## Situations pour mettre les élèves en activité d'apprentissage

### “Théorie des situations didactiques” de Brousseau - 5 situations pour l'enseignement des concepts mathématiques

**Dévolution** : engager les élèves dans la tâche et dans sa réalisation. Familiarisation avec le matériel, les contraintes et les critères de réussite.

**Situation d'action** : les élèves cherchent à réaliser la tâche. Confrontation aux critères de réussites et contraintes. Encouragements du PE, + allers-retour fréquents vers la dévolution.

**Situation de formulation** : communication écrite ou orale. (ex : aller chercher autant de bouchon...) Mobilisation de la désignation écrite et orale du nombre. Mise en lien.

**Situation de validation** : PE conduit les élèves à valider ou non

**Institutionnalisation** : le PE dégage des généralités des procédures rencontrées en classe : conduit les élèves à réaliser que les procédures pourront être réutilisées dans d'autres contextes analogues.

## Rôle du PE dans la mise en oeuvre de ces situations

- agir pour atteindre l'objectif avec des consignes et des contraintes
- dire comment on a procédé
- comprendre pourquoi on a réussi ou non
- écouter les autres
- savoir qu'il y a des connaissances à apprendre

💡 Le rôle du professeur est majeur :<sup>3</sup>

- attentif à la pertinence des conditions (matériel, consignes, etc.) au regard des apprentissages
- encourager et sécuriser : valorise les essais, rassure, verbalise qu'on est en train d'apprendre.

💡 Les enseignants atténuent parfois leurs exigences quant aux savoirs à acquérir pour préserver la qualité de relation avec les élèves.

💡 Ludicité des situations : au détriment des enjeux de savoir.

## Apports didactiques pour l'apprentissage du nombre.

### Les fonctions du nombre :

- pour exprimer une quantité (cardinal) ⇒ ex : réaliser une collection, etc.
- pour exprimer une position (ordinal) ⇒ ex : numéro des jours, jeux de plateau, etc.
- pour calculer ou comparer (des quantité et des positions)

### Enseigner les représentations pour enseigner le nombre

Pour conserver la mémoire d'un nombre, on utilise :

- représentation analogique (constellation, doigts, etc.)
- représentation verbale (mot-nombre)
- représentation symbolique (chiffres)

Comprendre la nécessité de conserver la mémoire d'un nombre est le premier apprentissage du nombre.



Les mises en œuvre didactiques peuvent viser à rendre l'utilisation de la représentation analogique inefficace.

<sup>3</sup> Magali Hersant - Pratiques de débutants en mathématiques maternelle

## Enseigner le passage de la quantité au nombre

**Objectif école maternelle** : enseigner la traduction d'une quantité par un nombre.

Besoin d'apprendre l'indépendance entre quantité et organisation spatiale (=conservation des quantités).

ex : des jetons aussi nombreux mais plus ou moins espacés.

Brissiaud : différence entre maîtrise de la comptine et dénombrement. (fonction orale acquise mais pas fonction cardinale).

Pour le travailler : "Un jeton, et encore un jeton, ça fait deux jetons, et encore un jeton, ça fait trois jetons... et encore un jeton, ça fait huit jetons. »

### Exemples de mise en oeuvre pédagogiques :

Comme celles que nous avons analysées, les situations conçues pour l'école maternelle reposent souvent sur du matériel. Celui-ci est pensé pour que les élèves réalisent les tâches proposées grâce à leurs actions. Il est aussi pensé pour que les élèves construisent les connaissances qui sous-tendent ces actions. Cela n'a rien d'automatique : comme le montrent différentes recherches<sup>62</sup>, il ne suffit pas que les élèves agissent pour qu'ils apprennent de leurs actions. Certains élèves n'ont pas compris qu'ils ont à apprendre de ce qu'ils ont fait, ils croient que seule la réussite est importante et, par conséquent, ils ne comprennent pas les enjeux de l'institutionnalisation.

## Quelles mises en oeuvre pédagogiques pour prendre en compte les besoins de chaque élève ?

Les étapes de l'apprentissage du nombre

Comment construire un enseignement progressif pour chaque fonctionnalité du nombre ?

Comment enseigner les mathématiques en articulant les quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle ?

### Les étapes de l'apprentissage du nombre

#### Vers une programmation de cycle.

Pas de répartition des compétences chronologiquement.

Pas de fixation des nombres étudiés en PS, MS, GS...

⇒ travail de programmation à mener sur les différentes situations et sur les procédures utilisées ou sur les objectifs de séquence.

Andy LABOUCHE-MINET - ICS de la circonscription de Miribel

*exemple : la connaissance que le cardinal ne change pas si on inverse le sens des objets peut se travailler sur tous les niveaux.*

*exemple 2 : travailler la correspondance terme à terme avec des quantités différentes.*

## Faire évoluer le rôle de la manipulation

Manipulation = étape intermédiaire

Le matériel doit évoluer et être de plus en plus abstrait (moins figuratif).

Le matériel sert d'abord d'objet de travail (observer) puis d'objet de validation (abstraction).

Les situations doivent rendre la progression progressivement inefficace.

## Mener un enseignement qui s'appuie sur le langage oral et écrit

Manipulation articulée avec la verbalisation : décrire, valider, expliquer sa procédure

→ vers une prise de conscience des procédures utilisées.

outils : "comment le sais-tu ? comment fais-tu ? Comment es-tu sûr de ta solution ? Comment peux-tu le vérifier"

## Conduire un enseignement différencié

Importance d'observer les activités des élèves pour évaluer et réguler les apprentissages.

Outils de différenciation : taille des collections, possibilités de manipulation, anticipation des réponses, contrainte formulation orale ou écrite d'une collection à constituer.

## Construire un enseignement progressif pour chaque fonctionnalité du nombre

**Rappel** : Les fonctions du nombre :

- pour exprimer une quantité (cardinal) ⇒ ex : réaliser une collection, etc.
- pour exprimer une position (ordinal) ⇒ ex : numéro des jours, jeux de plateau, etc.
- pour calculer ou comparer (des quantités et des positions)

## Programmation de la fonction cardinale

cf. pages 54 à 61 du guide <https://eduscol.education.fr/document/50924/download>

## Les écritures chiffrées du nombre

Symbole qui permet de garder la mémoire d'un nombre.

Enjeu : percevoir que les signes ont valeur langagières, en réception (écrit) et en production (orale).

Écriture chiffrées présentées aux élèves dès qu'ils sont capables de les dire oralement.

L'écriture se fait quand ils sont capables de les lire (traduire une écriture chiffrée en désignation orale).

Trois types de situations pour faire intervenir l'écriture chiffrée :

- réaliser une collection indiquée en chiffres
- indiquer une quantité à l'écrit
- comparer deux quantités données en chiffres.

## Programmation de l'enseignement de la fonction ordinale des nombres

### Deux types de situations propices :

1. exprimer la position d'un objet ou d'une personne
2. comparer des positions

Les collections doivent être ordonnées avec une origine et un sens.

Pour l'expression orale de la suite des nombres ordinaux "première, deuxième, troisième...", il est nécessaire que les E aient compris le nombre en tant que quantité avant d'aborder le nombre en tant que position.

## Programmation de l'enseignement de la résolution de problème

Au cycle 1, il n'est pas attendu des élèves qu'ils utilisent les opérations et le langage mathématique «plus, moins, égal».

### Trois critères sont à prendre en compte :

- **le type de problèmes**
- **les quantités mises en jeu** par le problème (elles doivent aller jusqu'à 10 en fin de maternelle, et peuvent être supérieures avec certains élèves)
- **le matériel à disposition.**

### Les types de problèmes et les quantités en jeu

- Recherche d'une quantité totale de réunion de deux quantités (possible dès que quantités connues)
- Recherche d'une partie ou de la quantité finale après retrait.
- problèmes de partage ou regroupement
  - exemple : j'ai 6 crayons, je veux faire des paquets de 2, combien de paquets ?

### Matériel à disposition et évolution :

cf. pages 64 à 66 du guide : <https://eduscol.education.fr/document/50924/download>

# Comment enseigner les mathématiques en articulant les modalités de l'école maternelle ?

*"Des situations d'apprentissage variées structurées autour d'un objectif pédagogique précis"*

- **apprendre en jouant;**

**Les jeux symboliques**



Mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.



Mettre juste ce qu'il faut comme cuillères pour qu'il y ait une cuillère par poupée.

Importance de construire des programmation de jeux : mieux vaut-il faire évoluer les jeux plutôt que multiplier les situations.

Exemple de jeux : l'oie, greli-grelo, bataille, Halli-Galli, Memory, Loto.

**ENJEU : NE PAS CORRELER LES PROGRES DES ELEVES AU NOMBRE DE JEUX UTILISÉS.**

**Idée de programmation de jeux de dés au cycle 1** 👍

Jeu avec	Objectifs	PS	MS	GS
un dé pointé (en constellation)	Associer une quantité de points et un déplacement.	x		
un dé chiffré	Associer une écriture chiffrée à une quantité et à un déplacement.		x	
deux dés pointés	Dénombrer, surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus.	x	x	x
un dé pointé et un dé chiffré	Surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus.		x	x
deux dés chiffrés	Surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus. Utiliser les mémorisations : « Quatre et deux, ça fait six. »			x

- **apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes concrets;**

🎯 Obj : amener les élèves à comprendre que le nombre est un outil puissant pour résoudre des problèmes. Un maximum d'expériences concrètes.

Exemple : réaliser des collections identiques, compléter une collection, ajouter ou retirer et voir la collection évoluer, réaliser les partages équitables.

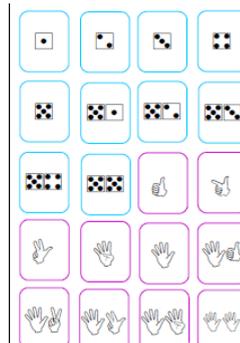
- **apprendre en s'exerçant;**

Il s'agit de reprendre une activité de classe qui n'est pas encore maîtrisée en proposant un entraînement systématique dans un contexte sécurisé.

Exemples : matériel d'auto-entraînement pour associer écriture symbolique à une collection, memory pour associer des nombres (cf. image), nombre mystère.

Entraînement = libérer les ressources cognitives pour la résolution de pb.\*

! Attention quand les élèves n'ont pas compris le sens de leurs automatismes



- **apprendre en se remémorant et en mémorisant (photo)**

Importance de la mémorisation guidée par le PE.

Langage d'évocation

PAGES FOCUS

**Focus | Comment mobiliser  
des activités ritualisées  
qui évoluent dans le temps  
au service des apprentissages  
mathématiques ?**

Pages 76 : <https://eduscol.education.fr/document/50924/download>

## De l'école maternelle à l'école élémentaire : le nombre dans le cadre de la continuité grande section-CP.

### Objectifs :

1. Liaison entre les classes, écoles, enseignants, les élèves et leurs familles.  
Construction du lien à travers des visites, échanges d'actions et de travaux pédagogiques communs.
2. Eviter les ruptures dans le parcours d'apprentissage de l'élève.

Nécessité d'une harmonisation pédagogique :

- un axe collectif : outils, matériels, procédures, progressions et programmations
- un axe individuel : acquis, réussites et attentions.

## La construction du nombre

### Les faits numériques :

Soulager la mémoire de travail des élèves : travaux de décomposition, recomposition, compléments à dix...

- + jeux de systématisations (cf. plus haut) : lucky luke, greli grelo, etc.

## Aspect décimal de la numération

Jeu des allumettes : déterminer un nombre d'allumettes dans une grande boîte en faisant des paquets de 1, 2, 5, 10...

## Résoudre des problèmes

(cf. focus «Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle»). <https://eduscol.education.fr/document/50924/download>

## Situations de référence

Passage vers plus d'abstraction au CP : usage des signes + et -

Calcul et écriture chiffrées.

Exemple de problème page 116 <https://eduscol.education.fr/document/50924/download>

